



**ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«КОСТРОМСКОЙ КОЛЛЕДЖ ОТРАСЛЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ СТРОИТЕЛЬСТВА И
ЛЕСНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ»**

**РЕГИОНАЛЬНЫЙ МЕТОДИЧЕСКИЙ КОНКУРС ПЕДАГОГИЧЕСКИХ РАБОТНИКОВ
КОСТРОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ОД.07 МАТЕМАТИКА
К РАЗДЕЛУ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»**

АВТОР РАБОТЫ СИДОРОВА МАРИНА МИХАЙЛОВНА

ПРЕДМЕТНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ: МАТЕМАТИКА

НОМИНАЦИЯ: ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

КОСТРОМА, 2025

Рассмотрен и одобрен на заседании ЦМК
общеобразовательных дисциплин
Протокол № 7 от «21» января 2025 г.

Рекомендован к применению
Заседание методического совета
Протокол № 11 от «11» февраля 2025 г.

Сидорова М.М. «Сборник практических задач по ОД.07 Математика к разделу «Элементы теории вероятностей», дидактические материалы для обучающихся. – Кострома: ОГБПОУ «Костромской колледж отраслевых технологий строительства и лесной промышленности», 2025г. – 64 с.

Сборник практических задач составлен в соответствии с ФГОС СПО, рабочими программами курса ОД.07 Математика для подготовки студентов средних профессиональных образовательных организаций, обучающихся по программам подготовки специалистов среднего звена, содержит задачи по разделу математики: «Элементы теории вероятностей». Сборник предназначен для студентов первых, вторых курсов средних профессиональных образовательных организаций, обучающихся по специальностям 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений, 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий, 35.02.03 Технология деревообработки, 35.02.12 Садово-парковое и ландшафтное строительство, 35.02.01 Лесное и лесопарковое хозяйство. Сборник может быть использован как дополнительный источник практических задач с профессионально-ориентированным, региональным содержанием при преподавании теории вероятностей в 10-11 классе средней общеобразовательной школы. В сборнике содержатся теоретические сведения и необходимые формулы, даны примеры решения задач, в конце каждой темы размещены задачи работы в аудитории и для самостоятельного решения, сопровождающиеся ответами в конце сборника.

© ОГБПОУ «Костромской колледж отраслевых технологий строительства и лесной промышленности», 2025г.

© Сидорова М.М., 2025г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	4
1. Основные понятия комбинаторики.....	7
1.1 Перестановки.....	7
1.2 Размещения.....	9
1.3 Сочетания.....	11
2. Случайные события и их вероятности.....	13
2.1 Классическая вероятность.....	15
2.2 Совместные и несовместные события. Теоремы о вероятности суммы событий. Теоремы о вероятности произведения событий.....	21
2.3 Применение комбинаторики к решению простейших вероятностных задач	33
2.4 Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Условная вероятность.....	36
2.5 Формула полной вероятности и формула Байеса.....	41
2.6 Независимые повторения испытаний с двумя исходами. Схема Бернулли и теорема Бернулли. Наивероятнейшее число успехов.....	46
3 Дискретная случайная величина, закон ее распределения.....	53
4. Ответы к задачам из сборника.....	58
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	61
Список используемых источников.....	62

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

„В жизни нет гарантий, существуют одни вероятности.“

Том Клэнси американский писатель и сценарист компьютерных игр 1947–2013

В современном мире универсальность вероятностно-статистических законов становится основой для описания научной картины мира. В нашу жизнь прочно и надолго вошли выборы, диаграммы социологических опросов, банковские кредиты и страховые полисы, таблицы занятости и прогнозы погоды сообщающие, что «завтра ожидаются осадки в смешанной форме с вероятностью 35%» оставляя обывателей в растерянности: брать ли зонт?

Вероятность и статистика – тот самый раздел математики, который тесно связан с окружающими нас массовыми явлениями. Этот раздел позволяет на деле осуществить связь с математики с реальной жизнью и показать взаимосвязь практически с любой профессиональной сферой. Любой учащийся в своей жизни ежедневно сталкивается с вероятными ситуациями, ведь игра и азарт составляют существенную часть его жизни. Вопросы, связанные с пониманием вероятности и достоверности, проблемой выбора лучшего из нескольких вариантов решения, оценка возможного выигрыша или неудачи позволяют студенту увидеть связь изучаемых тем по математике с реальной жизнью.

Есть много разных и интересных сборников задач по основам теории вероятностей. Каждый учитель, преподаватель, начиная вести данный курс в школе или в профессиональном образовательном учреждении использует несколько источников, стремясь при этом извлечь из них максимальную пользу для себя и для учащихся. Что бы успешно решать задачи, учащемуся мало знать формулу, способ решения, надо уметь построить вероятностную модель реальной ситуации, описанной в условии задачи.

Данное пособие составлено в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования (далее – ФГОС СПО), с целью помочь студенту, учащемуся в формировании вероятностного мышления, в освоении раздела «Элементы

теории вероятностей» курса ОД.07 Математика, а учителю помочь в преподавании предмета. Большая часть задач, из которых составлен сборник имеет прикладную направленность, содержит профессионально-ориентированные элементы, в которых кроме того используются материалы, связанные с нашим регионом. Опыт преподавания математики показывает, что целенаправленное внедрение в практику обучения профессионально-ориентированных задач и задач, связанных с регионом проживания, ведёт к повышению качества математических знаний, повышению уровня обучаемости, мотивации к изучению математики, в том числе способствует формированию профессиональной компетентности.

Решение задач сборника по теории вероятностей курса ОД.07 Математика способствует освоению общих компетенций:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам;

ОК 2. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

Структура и содержание сборника соответствует разделу «Элементы теории вероятностей» примерной рабочей программы общеобразовательной дисциплины ОД.07 «Математика» для профессиональных общеобразовательных организаций. При создании этого сборника основная задача была наполнить его достаточным объёмом практических задач для решения в аудитории и задач для самостоятельного решения, а также необходимым минимумом теоретического материала с примерами решения задач по конкретной теме. В свою очередь содержание задач для самостоятельного решения подобрано так, чтобы студенты могли решать эти задачи, опираясь на задачи, разобранные в аудитории.

Задачи для аудиторной и самостоятельной работы для удобства пронумерованы: первые две цифры (например 1.1) в номере задач соответствует

номеру параграфа и пункта теоретического раздела сборника, третья – сквозному номеру задачи в данном блоке.

В конце сборника имеются ответы ко всем задачам сборника, в полном соответствии с нумерацией задач.

1. Основные понятия комбинаторики

Цель: формирование умений решать задачи на размещения, сочетания и перестановки.

Студент должен знать:

- понятия: факториал, размещения, сочетания, перестановки;
- формулы для расчета размещений, сочетаний, перестановок;
- основные правила комбинаторики

Студент должен уметь:

- применять формулы для расчета размещений, сочетаний, перестановок;
- решать задачи на размещения, сочетания и перестановки.

Перестановки, размещения, сочетания

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются законы комбинирования вариантов, формулы для подсчета их количества, правила перебора всевозможных вариантов.

1.1 Перестановки – простейшие комбинации, которые можно составить из n элементов некоторого множества, то есть любое расположение элементов множества в каком-либо порядке.¹

Рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть имеются три отвертки-плоская, крестовая и шестигранная. Для удобства обозначим их буквами П, К и Ш соответственно. Эти отвертки можно закрепить на магнитном держателе по-разному. Если первой закрепить плоскую, то возможны такие варианты расположения: ПКШ или ПШК. Если первой закрепить крестовую, то возможны такие варианты расположения: КПШ или КШП. И наконец, если первой закрепить

¹ Примечание: здесь и далее основной теоретический материал заимствован из источников:

1) https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/files/kurs_teorver_demo.pdf

2) <https://infourok.ru/razrabotka-zadaniy-dlya-samostoyatelnoy-raboti-po-teorii-veroyatnostey-1452444.html>

шестигранную отвертку, то возможны такие варианты расположения: ШПК или ШКП. Каждое из этих расположений называют перестановкой из 3-х элементов.

Число перестановок из n элементов обозначают символом P_n (читается « P из n »). В примере рассмотренном выше берется число перестановок из 3-х элементов $P_3=6$

Для подсчета числа перестановок из трех элементов, можно воспользоваться правилом умножения. Так как на первое место можно поставить любой из 3-х имеющихся элементов, на второе любой из 2-х оставшихся, на 3-е остается единственная возможность. Значит $P_3=3 \cdot 2 \cdot 1=6$

Аналогично рассуждая получим формулу числа перестановок из n элементов: $P_n=n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Расположив элементы в порядке возрастания, получим: $P_n=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$. Для произведения первых n натуральных чисел используют специальное обозначение: $n!$ (читается n факториал). Например $2!=1 \cdot 2$, $6!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, кроме того по определению считают, что $1!=1$, $0!=1$. Таким образом, число всех возможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле: $P_n=n!$

Пример 2. Сколькими способами можно разместить 12 студентов за конференц столом, на котором поставлено 12 ноутбуков?
Решение: $P_{12}=12!=479\,001\,600$ способов.

Задачи для решения в аудитории

- 1.1.1 Сколькими способами можно составить букет из 7 цветов?
- 1.1.2 Сколькими способами 9 студентов могут встать в очередь в столовую?
- 1.1.3 Сколькими способами можно уложить 6 плиток керамогранита на пол санузла?
- 1.1.4 Сколько есть способов раздать номера от 1 до 5 пяти участникам регионального этапа чемпионата «Профессионалы» в компетенции «Столярное дело»?
- 1.1.5 Участники лыжных соревнований «Галичское заозерье» стартуют с интервалом в 30 секунд. Порядок старта определяется жребием. Сколько

существует различных последовательностей выхода лыжников на старт, если на старт первого этапа соревнований выходят 10 участников?

1.1.6 Сколько различных перестановок букв (под перестановкой букв будем понимать слово, как набор букв не обязательно осмысленное) можно составить из букв слова: «столяр»

1.1.7 Сколькими способами столяр-краснодеревщик может разместить в держателе 7 различных стамесок по дереву?

Задачи для самостоятельного решения

1.1.8 Сколько различных перестановок букв можно составить из букв слова: «топор»?

1.1.9 Сколько существует способов размещения в держателе 4-х диэлектрических отверток?

1.1.10 Сколькими способами на лесополосе можно высадить 8 саженцев голубой ели?

1.1.11 Участники «Областного легкоатлетического кросса, проводимого в рамках Всероссийского дня бега «Кросс Нации - 2024»» стартуют с интервалом в 30 секунд. Порядок старта определяется жребием. Сколько существует различных последовательностей выхода бегунов на старт, если на первом этапе в соревнованиях стартует 10 участников?

1.1.12 Сколькими способами можно уложить 6 плиток керамогранита на пол санузла?

1.1.13 Сколько существует способов укладки 9 штук деревянного бруса в качестве лаг для пола?

1.2 Размещения

Выборками элементов называются группы по m элементов (от 1 до n) взятые из n элементов. Выборки могут быть упорядоченными – размещениями и не упорядоченными – сочетаниями.

Размещениями из n элементов по m называют такие выборки, комбинации по m элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или

ЭЛЕМЕНТОВ.

Число размещений из n элементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ (в этой формуле } m \text{ множителей начиная с } n \text{).}$$

Пример 3. Студенты 2-го курса по специальности «Строительство и эксплуатация зданий» изучают 12 дисциплин. Сколько существует различных возможностей составления расписания на следующий день, что бы в нем было 4 учебных пары?

Решение. $A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880$ способами (в этой формуле 4 множителя начиная с 12).

Пример 4. Сколькими способами организаторы чемпионата по профессиональному мастерству среди инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья «Абилимпикс» могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третьим?

Решение. $A_{16}^3 = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ способами.

Определение. Размещения из n элементов взяты по n , отличающиеся друг от друга порядком расположения элементов, называют **перестановками**.

Расчет A_n^n выполняется с помощью соотношения:

$$A_n^n = P_n n(n-1)(n-2)\dots 3*2*1 = n!$$

Пример 5. Сколькими способами можно разместить 12 лиц за столом, на котором поставлено 12 приборов?

Решение: $A_{12}^{12} = P_{12} = 12! = 479\,001\,600$ способов.

Задачи для решения в аудитории

1.2.1 Из 25 студентов, входящих в состав студенческого совета ККОТСиЛП нужно выбрать председателя студсовета и старшего культорга, Сколькими способами это можно сделать?

1.2.2 Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен по «Электротехнике», могут занять места в аудитории, в которой стоит 10 парт, учитывая, что студенты садятся по одному за парту?

1.2.3 Имеется 12 сортов роз. Сколько различных (по сочетанию видов роз) вариантов букетов из 5 цветов можно составить?

1.2.4 Для восстановления леса после пожара лесовод планирует в этом году высадку хвойных на трех лесоучастка из 10. Сколькими способами это можно сделать?

1.2.5 Сколькими способами можно отобрать ремонтную бригаду из 6 человек, если в смену на практику заступили 14 студентов обучающихся по специальности «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений».

Задачи для самостоятельного решения

1.2.6 Имеется 15 видов астр. Сколько различных (по сочетанию видов астр) вариантов букетов из 7 цветов можно составить?

1.2.7 Сколькими способами 5 студентов, сдающих экзамен по «Почвоведению», могут занять места в аудитории, в которой стоит 11 парт, учитывая, что студенты садятся по одному за парту?

1.2.8 Сколькими способами старший мастер может отобрать группу из 5 студентов для прохождения практики в «НАО Свеза Кострома» из 20 учащихся.

1.2.9 В лотерее разыгрывается несколько выигрышных номеров из общего количества номеров. Сколько всего существует комбинаций выигрышных номеров, если разыгрывается 5 номеров из 36?

1.2.10 На круглой деревянной заготовке по границе окружности отметили 25 точек. Сколько можно выпилить разных шестиугольников с вершинами в этих точках?

1.3 Сочетания.

Сочетаниями называют все возможные комбинации из n элементов по m (где $m \leq n$), отличающиеся друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.

Число всех сочетаний из n элементов по m равно числу всех размещений из n элементов по m , деленному на число всех перестановок, какие можно

сделать из m элементов: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$.

Свойства числа сочетаний

Свойство числа сочетаний можно выразить следующими формулами:

1) $C_n^0=1$; 2) $C_n^1=n$; 3) $C_n^m = C_n^{n-m}$; 4) $C_n^n=C_n^0 = 1$.

Пример 6. В спортивной баскетбольной секции колледжа занимаются 12 студентов. Сколько разных стартовых пятерок может составить тренер из 12 баскетболистов?

Решение. $C_{12}^5 = \frac{12!}{7!5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 8}{1} = 792$.

Пример 7. Из группы, студентов-активистов колледжа - представителей разных студенческих отрядов, насчитывающей 25 человек, выбирают троих для участия в слете РСО. Сколькими способами это может быть сделано?

Решение. $C_{25}^3 = \frac{25!}{22!3!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{25 \cdot 4 \cdot 23}{1} = 2300$.

Задачи для решения в аудитории

1.3.1 Вычислите: C_9^3 ; C_{12}^7 ; C_{13}^{13} ; C_{15}^1 ; C_{24}^0 .

1.3.2 Найдите значение выражения: $C_7^3 + C_8^6$; $C_{15}^{14} - C_{17}^1$.

1.3.3 Имеется 7 хризантем разного цвета. Требуется составить букет из 3-х хризантем. Сколькими способами из семи данных растений можно составить букет, в котором по-разному сочетаются три хризантемы?

1.3.4 В группе студентов, обучающихся по специальности «Строительство и эксплуатация зданий» 8 человек успешно владеют техникой укладки кирпича. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в региональном этапе чемпионата «Профессионалы» (пары каменщиков отличаются хотя бы одним студентом)?

1.3.5 Для ремонта электропроводки в здании школы прибыла бригада, состоящая из 13 студентов специальности «Монтаж и наладка электрооборудования промышленных и гражданских зданий». Сколькими способами можно отправить четырех из них на третий этаж (пары отличаются хотя бы одним студентом)?

1.3.6 На двери в мастерские установлен кодовый замок с кнопками. На кнопках изображены цифры от 1 до 9. Что бы открыть дверь, нужно одновременно нажать три кнопки кода. Сколько существует различных комбинаций цифр? (так как

кнопки нажимаются одновременно комбинации 123,231,321... считаются одинаковыми)

Задачи для самостоятельного решения

1.3.7 Вычислите: C_8^4 ; C_{14}^6 ; C_{11}^{11} ; C_{19}^1 ; C_{60}^0 .

1.3.8 Найдите значение выражения: $C_{10}^5 + C_9^3$; $C_{14}^{13} - C_{19}^1$.

1.3.9 Имеется 10 многолетников для клумбы непрерывного цветения. Требуется составить композиции из 3-х растений. Сколькими способами можно разместить растения, в котором по-разному сочетаются три многолетника из десяти данных?

1.3.10 В группе студентов, обучающихся по специальности «Технология деревообработки» 6 человек успешно владеют столярным мастерством. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в региональном этапе чемпионата «Профессионалы» (пары отличаются хотя бы одним студентом)?

1.3.11 Для подготовки здания новой школы прибыла бригада, состоящая из 20 студентов 3-го курса специальности «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений». Сколькими способами можно отправить пятерых из них на первый этаж для оштукатуривания кирпичной кладки стен в столовой (пятерки отличаются хотя бы одним студентом)?

1.3.12 Из группы, студентов колледжа представителей студенческого отряда «Дельта», насчитывающей 25 человек, выбирают четверых для работы на всероссийской студенческой стройке «Сибирь 2025». Сколькими способами это может быть сделано (четверки отличаются хотя бы одним студентом)?

Вопросы для самоконтроля по теме:

- Продолжите определение: «Перестановки – это...». Запишите формулу подсчета перестановок, приведите пример.

- Что называют выборками элементов?

- Продолжите определение: «Размещение – это...». Запишите формулу подсчета числа размещений из n элементов по m , приведите пример.

- Продолжите определение: «Сочетание – это...». Запишите формулу подсчета числа сочетаний из n элементов по m , приведите пример.

2. Случайные события и их вероятности

Цель: формирование умений вычислять вероятность события; вероятности случайных событий по классическому определению; применять теоремы сложения и умножения вероятностей для решения задач; применять правила комбинаторики для решения задач по теоремам сложения и умножения вероятностей.

Студент должен знать:

- классическое определение вероятности;
- понятие о противоположных событиях и их вероятности;
- определения суммы событий, произведения событий;
- формулировки и формулы теорем сложения и умножения вероятностей.

Студент должен уметь:

- вычислять вероятность события, используя классическое определение и формулы комбинаторики;
- решать задачи на применение теорем сложения и умножения вероятностей.

Событие, вероятность события.

Определение. Результат произведенного (или могущего быть произведенным) испытания называется **событием**.

Существует три вида событий: достоверные события, невозможные события и случайные события.

Событие, которое в результате данного опыта обязательно произойдет называют **достоверным**.

Примеры достоверных событий: Извлечение деревянной цилиндрической заготовки из ящика с такими заготовками. Выпадение орла или решки при подбрасывании монеты. В группе 6 девушек и 18 юношей, к доске вышла отвечать девушка или вышел юноша.

Событие, которое не может произойти в результате данного опыта называют **невозможным**.

Примеры невозможных событий: в чайнике закипела вода при температуре $+30^{\circ}\text{C}$. 31 января в Костромской области будет солнечно $+30^{\circ}\text{C}$. Вода в реке Костроме замерзла в июле при дневной температуре $+25^{\circ}\text{C}$

Случайным, называется событие, которое в результате данного испытания (в процессе наблюдения или эксперимента) может произойти или не произойти.

Примеры случайных событий: выигрыш раунда в шахматах, поражение мишени или промах при выстреле, выпадение 3 при броске кубика, вероятность поймать щуку на рыбалке и др.

Каждое случайное событие есть следствие действия очень многих причин, учесть влияние которых на результат испытания не представляется возможным. Однако случайный эксперимент можно описать с помощью задания вероятностей элементарных событий.

При этом должны соблюдаться два условия:

1. Вероятность элементарного события – неотрицательное число, чаще всего положительное.
2. Сумма вероятностей всех элементарных событий опыта равна 1.

В некоторых случаях вероятность события можно установить, исходя из симметрии в случайном опыте. Например при бросании монеты считают её симметричной и поэтому вероятность выпадения каждой стороны равна $\frac{1}{2}$. По той же причине вероятность каждой грани считают равной $\frac{1}{6}$.

Еще одним методом вычисления вероятностей является экспериментальный или статистический, основанный на наблюдениях.

При многократных повторениях опыта частоты случайных событий оказываются близки к вероятностям. Повторяя опыт много раз можно оценить вероятность случайного опыта его частотой.

Вопросы для самоконтроля по теме:

- Какое событие называется достоверным? Приведите свой пример достоверного события.
- Какое событие называется случайным? Приведите свой пример случайного события.
- Какое событие называется невозможным? Приведите свой пример невозможного события.

2.1 Классическая вероятность

Пусть в результате некоторого опыта или испытания произошло n исходов, при которых событие A может произойти или не произойти. В m из этих исходов появление события A достоверно, в $n-m$ исходах — невозможно ($m < n$). Исходы, при которых событие A происходит обязательно, называются **благоприятствующими** появлению события A .

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех возможных исходов испытания: $P(A) = \frac{m}{n}$. Эту формулу называют классической вероятностью. Она верна в случае равновозможных исходов.

Возможны случаи:

- 1) $m = n \Rightarrow P(A) = 1$ — вероятность достоверного события равна 1;
- 2) $m = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ — вероятность невозможного события равна 0;
- 3) $m \neq n, m \neq 0 \Rightarrow 0 < P(A) < 1$.

Вероятность случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей. Таким образом, вероятность любого события A удовлетворяет неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$

Противоположное событие. Событие $\bar{A}$ называют противоположным событию A , если событие $\bar{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A .

Если сложить вероятности противоположных событий, то в результате получится единица: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, где A и $\bar{A}$ — противоположные события.

Пример 8. В ящике находятся 10 лампочек по 15 Вт, 10 – по 25 Вт, 15 – по 60 Вт и 25 – по 100 Вт. Определите вероятность того, что взятая наугад лампочка имеет мощность более 60 Вт.

$$15 \text{ Вт } 10 \text{ шт} \quad p = \frac{24}{60} = 0,4$$

25 Вт 11 шт

60 Вт 15 шт

100 Вт 24 шт

Всего 60 шт

Пример 9. В среднем из 3000 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

1 способ решения/запись условия

Качественный/не подтекает

Подтекает/не качественный/дефект/брак 12

Всего 3000

Решение:

$$p(\text{не качеств}) = \frac{12}{3000} = 0,004, \text{ так}$$

как сумма вероятностей

противоположных событий

равна 1, то $p(\text{качеств}) = 1 - 0,004$

$$= 0,996$$

2 способ/ Решение:

Насос не подтекает в $3000 - 12 = 2988$ случаях

$$p(\text{не подтекает}) = \frac{2988}{3000} = 0,996$$

Задачи для решения в аудитории

Классическая вероятность $p = \frac{m}{n}$

2.1.1 В офисе студии ландшафтного дизайна "IGARDEN" находятся 7 посетителей женского пола и 3 мужского. Определить вероятность того, что первым к дизайнеру обратится мужчина.

2.1.2 Маша, Тимур, Диана, Костя и Антон бросили жребий — кому достанется проект по оформлению цветами свадебного зала. Найдите вероятность того, что

проект точно не будет выполнять Антон.

2.1.3. Деревообрабатывающая компания Пиломатериалы⁴⁴ в соответствии со стандартами выпускает 23% обрезной доски отборного сорта, 26% - первого сорта, 47% - второго сорта, остальное третьего и четвертого сорта и частично брак. Найдите вероятность того, что наугад выбранная доска будет не ниже второго сорта.

2.1.4 С целью реализации программы популяризации культурных мероприятий среди молодежи в колледже был проведен опрос по наличию пушкинской карты среди всех студентов колледжа (на момент опроса их было 1045). На вопрос «Имеется ли у вас «Пушкинская карта?» утвердительно ответили 868 студентов. Пользуясь этими данными, оцените вероятность (найдите приближенное (округленное до сотых) значение вероятности), того, что случайно выбранный из этой группы студент утвердительно ответит на тот же вопрос.

2.1.5 В коробке где хранятся подрозетники лежат 50 подрозетников: 13 белых, 11 красных, 8 оранжевых, еще зеленые и синие - их поровну. Какова вероятность достать из коробки белый или зеленый подрозетник?

2.1.6 В коробке вперемешку лежат диэлектрические перчатки разных размеров, внешне одинаковые на вид, перчаток размера М в коробке 8 пар, размера L - 14 пар, перчаток размера XL в два раза больше чем перчаток размера М и 12 пар перчаток размера XXL. Найдите вероятность того, что наугад взятая Андреем Сергеевичем пара диэлектрических перчаток будет нужного ему размера XL.

Вероятность противоположных событий $p(A)+p(\bar{A})=1$

2.1.7 Из каждых 100 энергосберегающих ламп, мощностью 100Вт, поступающих в продажу, в среднем 3 неисправны. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине энергосберегающая лампа будет исправной?

2.1.8 Вероятность того, что приобретенные на оптовой базе семена крупноцветковой синей петунии сорта «Игл» всхожи составляет 0,78. Какова вероятность того, что наугад выбранное из пакета семян семечко петунии не всхоже?

2.1.9 Из 20 полотен для ручного лобзика фирмы ВОЛАТ длиной 125мм , приобретенных в одной упаковке в строительном магазине 2 ломаются после первого надпила. Какова вероятность того, что случайно взятое из упаковки полотно окажется качественным?

Задачи для самостоятельного решения

Классическая вероятность $p = \frac{m}{n}$

2.1.10 В коробке где хранятся семена однолетников лежат 50 пакетов семян: из них 17 астры, 9 циннии, 8 бархатцы, еще семена газании и годеции - их поровну. Какова вероятность достать из коробки пакетик с астрами или с газаниями?

2.1.11 Строители-отделочники Константин, Василий, Семен, Иван, Андрей и Павел бросили жребий — кому достанется проект по оформлению плиткой кухни кафе «Русские традиции». Найдите вероятность того, что проект точно не будет выполнять Василий (ответ округлите с точностью до сотых).

2.1.12 В костромском офисе студии ландшафтной архитектуры "АрхЛандшафт" находятся 6 посетителей женского пола и 4 мужского. Определить вероятность того, что первым за консультацией к ландшафтному архитектору обратится девушка.

2.1.13 На стеллаже, где хранятся гвозди и саморезы в одинаковых коробках лежат 20 коробок крепежа: 3 с универсальными оцинкованными саморезами 3x30, 7 коробок саморезов для дерева фосфатированных 3,5x35, 6 коробок саморезов с пресс-шайбой 8x140, еще кровельные саморезы с буром 5,5x19 и саморезы кровельные-оцинкованные их поровну. Какова вероятность достать со стеллажа коробку с оцинкованными саморезами?

2.1.14 При изготовлении мебельного шканта диаметром 8 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не более чем на 0,02 мм, равна 0,927. Найдите вероятность того, что случайно взятый из коробки мебельный шкант будет иметь диаметр меньше, чем 7,98, или больше, чем 8,02 мм.

Примечание: Шкант — крепёжное изделие чаще в виде цилиндрического стержня с фасками или закругленными концами; вставной шип круглого сечения.

2.1.15 Деревообрабатывающий завод НАО «Свеза - Кострома» выпускает фанеру 5 основных сортов: Е (Элитного) сорта и фанеру первого, второго, третьего и четвертого сорта. Самый высокий сорт фанеры - Е в продаже встречается крайне редко и стоит сравнительно дорого, изготавливается под конкретного заказчика. На рынке в основном представлена фанера сортов от 1 до 4. В продажу поступает 14% продукции первого сорта, 25% продукции 2 сорта, 39 % продукции 3 сорта, а все остальное – 4 сорта. Найти вероятность того, что выбранное наугад изделие будет первого или второго сорта.

2.1.16 В сборнике билетов по электротехнике всего 50 билетов, в 10 из них встречается вопрос по электрическому полю, в 14 по постоянному току, в 5 о трансформаторах, в 11 вопросы связанные с переменным током, остальные по другим темам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете студенту достанется вопрос по постоянному току или по трансформаторам.

Вероятность противоположных событий $p(A)+p(\bar{A})=1$

2.1.17 Из каждых 200 светодиодных ламп мощностью 15 Вт, поступающих в продажу, в среднем 5 неисправны. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине лампа окажется исправной?

2.1.18 Вероятность того, что приобретенные на оптовой базе луковицы лилиевидных тюльпанов сорта «Клавдия» окажутся без пятен, плесени и серьёзных повреждений составляет 0,83. Какова вероятность того, что наугад взятая из упаковки луковица тюльпана окажется с повреждениями?

2.1.19 Пилки для электролобзика по металлу в оптовом магазине продаются по 10 упаковок, в каждой из которых 5 пилок. Из 50 приобретенных в строительном магазине пилок по металлу фирмы Strong 3 пилки ломаются до 5 минут их применения. Какова вероятность того, что взятая наугад пилка окажется качественной и прослужит более шести минут?

2.1.20 При изготовлении мебельного деревянного шканта диаметром 6 мм

вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не более чем на 0,02 мм, равна 0,905. Найдите вероятность того, что случайно взятый из коробки мебельный шкант будет иметь диаметр меньше, чем 5,95, или больше, чем 6,02 мм.

2.2 Совместные и несовместные события. Теоремы о вероятности суммы событий

Суммой двух случайных событий $A + B$ называется случайное событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий или события A , или события B , или обоих вместе. Если события A и B несовместны, то $A + B$ – это событие A , или событие B .

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Событием, противоположным событию A , называется событие, обозначаемое $\bar{A}$ и состоящее в том, что в результате опыта событие A не наступит.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Следствие 1. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Следствие 2. Если события $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = 1$.

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Пример 10. В коробке где хранятся подрозетники лежат белые, красные и синие подрозетники. Событие A состоит в том, что взятый наугад из коробки подрозетник окажется белым, а событие B – в том, что он окажется синим. Найдите вероятность события $C = \{\text{взятый наугад подрозетник белый или синий}\}$,

если $P(A)=\frac{1}{2}$, а $P(B)=\frac{2}{5}$.

Решение: Событие С состоит в том, что взятый из коробки подрозетник синий или белый. События А и В несовместны (не происходят одновременно, если берут один подрозетник) и независимы друг от друга, так как вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет и наоборот.

Поэтому $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = 0,9$.

Пример 11. В соревнованиях по лыжным гонкам среди команд юношей и команд девушек ПОО Костромской области в зачет областной спартакиады участвуют 4 спортсмена из ККОТСиЛП, 6 спортсменов из КЭТ им. Ф.В.Чижова, 7 спортсменов из КТТП и 5 спортсменов из КПК. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что спортсмен из ККОТСиЛП Андрей Т. будет выступать первым, вторым или третьим.

Решение: Рассмотрим три несовместных события: А - Андрей Т. выступает первым; В - Андрей Т. выступает вторым; С- Андрей Т. выступает третьим.

Решение задачи заключается в нахождении вероятности суммы этих трех несовместных событий: $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$. Найдем вероятность каждого из событий. Вероятность того, что Андрей Т. будет выступать первым, равна единица (т.к. спортсмен один), деленная на общее число выступающих

спортсменов: $P(A) = \frac{1}{4+6+7+5} = \frac{1}{22}$. Аналогично вычисляются вероятности двух

других событий: $P(B) = P(C) = \frac{1}{22}$. В итоге, искомая вероятность равна

$$P(A+B+C) = \frac{1}{22} + \frac{1}{22} + \frac{1}{22} = \frac{3}{22}.$$

Произведением двух случайных событий $A \cdot B$ событий А и В называется событие, состоящее в одновременном наступлении и события А, и события В.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в их одновременном, совместном появлении.

Событие A называется **независимым** от события B , если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Для независимых событий $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 12. Два металлорежущих станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение некоторого времени t равна $p_1=0,9$; второго — $p_2=0,8$. Найти вероятность бесперебойной работы обоих станков в течение указанного промежутка времени?

Решение: Опыт: бесперебойная работа станков в течение некоторого времени t . Событие C — бесперебойная работа обоих станков в течение указанного времени. Событие A — бесперебойная работа первого станка в течение времени t и событие B — бесперебойная работа второго станка в течение времени t . Тогда событие C есть произведение событий A и B , т.е. $C=A \cdot B$. Так как события A и B независимы (станки работают независимо друг от друга), то по формуле произведения независимых событий получим: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72$.

Пример 13. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятность, что первый студент решит задачу правильно составляет 0,8; второй – 0,7; третий – 0,65. Найти вероятность того, что:

- 1) все студенты решили задачу;
- 2) задачу решил только первый студент;
- 3) задачу решил только один студент;
- 4) задачу решил хотя бы один студент.

Решение: Опыт: три студента решают одну и ту же задачу по технической механике.

1) Событие A = {все студенты решили задачу}, событие B_1 = {первый студент решил задачу, вероятность этого события, по условию равна $P(B_1)=0,8$, событие B_2 = {второй студент решил задачу}, вероятность этого события, по

условию равна $P(B_2)=0,7$, событие B_3 — третий студент решил задачу, вероятность этого события, по условию равна $P(B_3)=0,7$. Событие A случится, если произойдут события B_1 , B_2 и B_3 одновременно, т.е. имеем произведение событий $A = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$.

Так как события B_1 , B_2 и B_3 независимы по условию, то по формуле произведения независимых событий получим:
 $P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,65 = 0,364$.

2) Событие C — задачу по технической механике решил только первый студент. В этом случае произошло событие B_1 , а события B_2 и B_3 не произошли, т.е. произошли события $\overline{B_2}$ и $\overline{B_3}$. Следовательно, $C = B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}$

Так как события B_1 , B_2 и B_3 независимы по условию, то по формуле произведения независимых событий получим: $P(C) = P(B_1) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(\overline{B_3}) = 0,8 \cdot (1-0,7) \cdot (1-0,65) = 0,084$.

3) Событие D — задачу по технической механике решил только один студент, означает, что задачу решит только первый студент $B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}$, или только второй студент $\overline{B_1} \cdot B_2 \cdot \overline{B_3}$, или только третий студент $\overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot B_3$ т.е. имеем сумму событий $D = B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3} + \overline{B_1} \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} + \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot B_3$. Тогда, вероятность события D равна: $P(D) = P(B_1 \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}) + P(\overline{B_1} \cdot B_2 \cdot \overline{B_3}) + P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(B_3)$, значит $P(D) = 0,8 \cdot (1-0,7) \cdot (1-0,65) + (1-0,8) \cdot 0,7 \cdot (1-0,65) + (1-0,8) \cdot (1-0,7) \cdot 0,65 = 0,172$

4) Событие E — задачу по технической механике решил хотя бы один студент, означает, что произошло или событие B_1 , или событие B_2 , или событие B_3 , или любые два из них, или все вместе. т.е. имеем сумму событий: $E = B_1 + B_2 + B_3$. Вероятность события E находим по формуле вероятности появления хотя бы одного события, т.е. $P(E) = 1 - P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(\overline{B_3}) = 1 - (1-0,8) \cdot (1-0,7) \cdot (1-0,65) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,35 = 0,979$.

Событие A называется **зависимым** от события B , если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло это событие B или нет.

Вероятность события A , вычисляемая при условии, что событие B произошло, называется **условной вероятностью** события a и обозначается $P_B(A)$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое из них произошло: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Следствие 1. Если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от события A .

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Для вычисления вероятности совместного появления большего числа событий, например, четырех, используют формулу: $P(A \cdot B \cdot C \cdot D) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) \cdot P_{ABC}(D)$.

Для нескольких независимых в совокупности событий вероятность их произведения равна произведению их вероятностей: $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$.

Следствие 3. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n)$

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

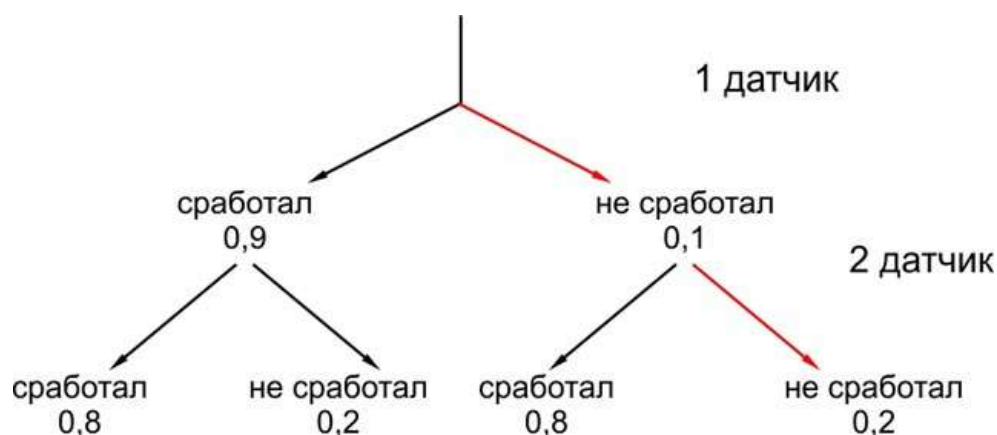
Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Пример 14. Согласно прогнозу метеорологов, вероятность дождя во вторник составляет 0,37, вероятность ветра 0,69, вероятность одновременного появления дождя и ветра составляет 0,13. Какова вероятность того, что во вторник будет дождь или ветер?

Решение. По теореме сложения вероятностей и в силу совместности предложенных событий имеем: $P(\text{дождь или ветер или дождь и ветер}) = P(\text{дождь}) + P(\text{ветер}) - P(\text{дождь и ветер}) = 0,37 + 0,69 - 0,13 = 0,93$.

Пример 15. Склад пиломатериалов оборудован двумя датчиками пожарной сигнализации (пожарными извещателями) различной конструкции, которые подают звуковой сигнал, если в помещение происходит задымление или возгорание. Вероятность выхода из строя в течение года для первого датчика равна 0,1 и второго 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы один датчик пожарной сигнализации останется исправным.²

Решение: В этой задаче пожарные извещатели работают независимо друг от друга. Используем схему: дерево вариантов для более наглядного решения задачи



Условию задачи удовлетворяют все варианты кроме одного, когда в течение года сломались оба датчика. Вероятность неблагоприятного исхода равна $0,1 \cdot 0,2$ (не сработал 1ый и не сработал второй датчик). Вероятность благоприятного исхода (хотя бы один датчик сработал) равна $1 - 0,02 = 0,98$.

² Задачи на дерево вариантов <https://ege-study.ru/teoriya-veroyatnostej-derevo-vozmozhnyx-issodov/>

Задачи о прохождении тока через электрические схемы (о системах капельного полива/ подкормки растений)

Определим виды событий при решении таких задач

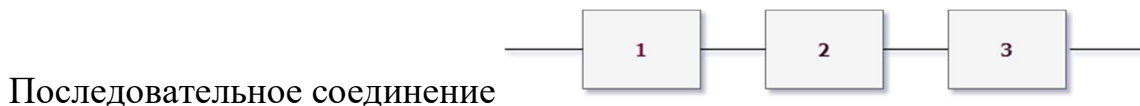
$X = \{\text{Цепь работает}\} = \{\text{Цепь пропускает ток/воду}\}$

$X = \{\text{Цепь не работает/не пропускает ток/воду}\} = \{\text{Произошел разрыв в цепи}\}.$

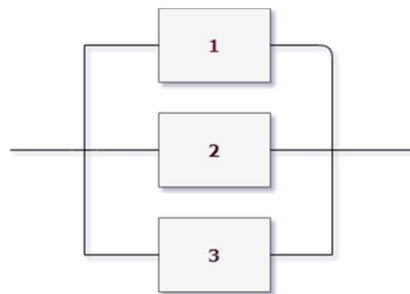
$A_i = \{\text{элемент } i \text{ работает/ пропускает ток/воду}\}$

$A_i = \{\text{элемент } i \text{ не работает/ не пропускает ток/воду}\}$

Последовательному соединению в цепи соответствует произведение событий, параллельному соединению - сумма событий.



$$P(X) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$



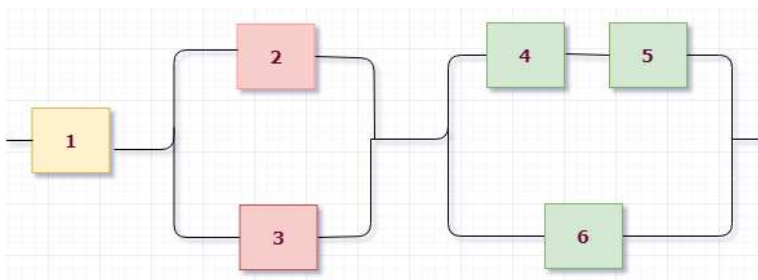
Параллельное соединение

$$P(X) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Пример 16. Дана схема включения элементов. Вероятность безотказной работы каждого элемента в течение времени T равна p . Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме. Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером i ($i=1,2,3,\dots$), а событие B – безотказную работу цепи. Требуется:

- 1) Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i .
- 2) Найти вероятность события B .
- 3) Вычислить $P(B)$, при $p=0,6$.³

³ Задачи на электрические схемы https://www.matburo.ru/tvart_sub.php?p=art_scheme



Решение: Событие $B = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = A_1 \cdot (A_2 + A_3) \cdot (A_4 \cdot A_5 + A_6)$

Выразим вероятность безотказной работы цепи за время T . Раскроем формулы по формулам сложения и умножения вероятностей:

$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n})$ и $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(B) = P(A_1 \cdot (A_2 + A_3) \cdot (A_4 \cdot A_5 + A_6)) = P(A_1) \cdot P(A_2 + A_3) \cdot P(A_4 \cdot A_5 + A_6) =$
 $= P(A_1) \cdot (1 - P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3})) \cdot (P(A_4) \cdot P(A_5) + P(A_6) - P(A_4) \cdot P(A_5) \cdot P(A_6))$. Подставим
 вместо $P(A_i) = p$ и получим: $P(B) = p \cdot (1 - (1-p) \cdot (1-p)) \cdot (p \cdot p + p - p \cdot p \cdot p) = p \cdot (1 - p^2) \cdot (p^2 + p - p^3)$

Найдем значение вероятности при $p = 0,6$, ответ округлим с точностью до тысячных: $p(B) = 0,6(1 - (1 - 0,6)^2) \cdot (0,6 + 0,6^2 - 0,6^3) \approx 0,375$.

Задачи для решения в аудитории

Теорема сложения вероятностей несовместных событий $P(A+B) = P(A) + P(B)$

2.2.1 На зачете по «Декоративной дендрологии» студенту достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Обрезка хвойных растений и лиан», равна $\frac{1}{30}$. Вероятность того, что это вопрос

на тему «Основные патогены древесных растений», равна $\frac{1}{15}$. Вопросов, которые

одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на зачете студенту достанется вопрос по одной из этих двух тем.

2.2.2 В магазине пиломатериалов продается Промышленный маркер краска Markal В Paintstik перманентный для всех видов поверхностей из 14 возможных цветов в наличии всего 100 маркеров пяти разных цветов, из них 13 – красных, 22 – зеленых, 23 – фиолетовых, еще есть синие и черные, их поровну. Найдите вероятность того, что во время покупки маркера Валера наугад вытащит синий или зеленый маркер.

2.2.3 В коробке где хранятся семена однолетников лежат 50 пакетов семян: из них 23 пакета с агератумами, 7 пакетов с цинниями, 12 с бархатцами, еще есть семена астр и годечии - их поровну. Какова вероятность достать из коробки пакет с астрами или с агератумами?

2.2.4 В соревнованиях по настольному теннису среди команд студентов ПОО Костромской области участвуют 6 спортсменов из ККОТСиЛП, 6 спортсменов из КЭТ им. Ф.В.Чижова, 6 спортсмена из КТТП и 8 спортсменов из КПК. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что спортсмен из ККОТСиЛП Антон К. будет выступать вторым, третьим или пятым.

Вероятность произведения независимых событий

2.2.5 Два деревообрабатывающих станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение некоторого времени t равна $p_1=0,87$; второго — $p_2=0,79$. Найти вероятность бесперебойной работы обоих станков в течение указанного промежутка времени?

2.2.6 В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: 0,1; 0,15; 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

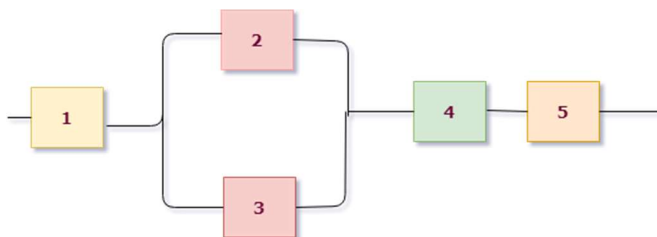
2.2.7 В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

2.2.8 Преподаватель математики вызывает студента к доске. Вероятность того что конкретный студент выйдет отвечать к доске, равна 0.6. Найти вероятность того, что выбранный студент выйдет к доске лишь на третий вызов.

2.2.9 Вероятность, что студент первокурсник Н. в первую сессию сдаст экзамен по русскому языку равна 0,95; экзамен по математике – 0,9; экзамен по МДК02.01 – 0,8. Найти вероятность, что студентом будет сдан:

- 1) только экзамен по русскому языку;
- 2) только один экзамен;
- 3) все три экзамена;
- 4) по крайней мере два экзамена;
- 5) хотя бы один экзамен.

2.2.10 Найти вероятность обрыва цепи, если вероятность отказа каждого элемента равна 0,2, а отказы элементов – независимые события.



Теорема сложения вероятностей совместных событий.

2.2.11 В группе специалистов Садово-паркового и ландшафтного строительства учится 20 человек, из которых четверо в рамках обучения по программе РСО получают дополнительную профессию Маляр, а шесть студенток занимаются на курсах по кройке и шитью. Известно, что получают дополнительную профессию и учатся на курсах кройки и шитья 2 студента этой группы. Какова вероятность того, что выбранный наугад студент этой группы получает профессию Маляр или учится на курсах кройки и шитья?

2.2.12 Лампочка в электромонтажной мастерской перегорает в среднем 3 раза за 100 включений. Лампочка в мастерской лес перегорает в среднем 1 раз в 50 включений. Вероятность того, что при одновременном включении лампочек обе перегорят, составляет 0,01. Какова вероятность того, что при одновременном включении ни одна из лампочек не перегорит?

2.2.13 Вероятность того, что Егор получит пятерку по лесоведению за устный ответ, равна 0,79. Вероятность того, что Егор получит пятерку по основам лесного картографирования за выполнение практической работы, равна 0,9. Вероятность получить пятерку по обоим дисциплинам оказалась равной 0,83. Какова вероятность того, что Егор не получит за ответы по лесоведению и

основам лесного картографирования ни одной пятерки?

Задачи для самостоятельного решения

Теорема сложения вероятности несовместных событий

2.2.14 На экзамене по «Древесиноведению и материаловедению» студенту достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Строение древесины», равна $\frac{1}{20}$. Вероятность того, что это вопрос на тему «Основным древесным породам», равна $\frac{2}{25}$. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене студенту достанется вопрос по одной из этих двух тем.

2.2.15 В коробке где хранятся луковицы растений лежат 20 пакетов луковичных культур: из них 7 пакетов с лилиями, 4 пакета с тюльпанами, 5 с гладиолусами, еще есть луковицы нарциссов и крокусов - их поровну. Какова вероятность достать из коробки пакет с луковицами лилий или крокусов?

2.2.16 В сборнике билетов по «Электротехнике» всего 50 билетов, в 10 из них встречается вопрос по трансформаторам, в 14 по переменному току, в 5 о сопротивлении, в 11 вопросы связанные с постоянным током, остальные по другим темам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете студенту достанется вопрос по переменному или постоянному токам.

2.2.17 В соревнованиях по армреслингу среди команд студентов ПОО Костромской области участвуют 4 спортсмена из ККОТСиЛП, 6 спортсменов из КЭТ им. Ф.В.Чижова, 3 спортсмена из КТТП и 5 спортсменов из КПК. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что спортсмен из ККОТСиЛП Антон К. будет выступать первым, третьим или четвертым. Результат округлите до сотых.

Вероятность произведения независимых событий

2.2.18 Два распиловочных станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение смены равна $p_1=0,93$; второго — $p_2=0,89$. Найти вероятность бесперебойной работы обоих станков в течение смены?

2.2.19 В электрическую цепь последовательно включены три электроприбора, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего электроприборов соответственно составляют: 0,13; 0,1; 0,08. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

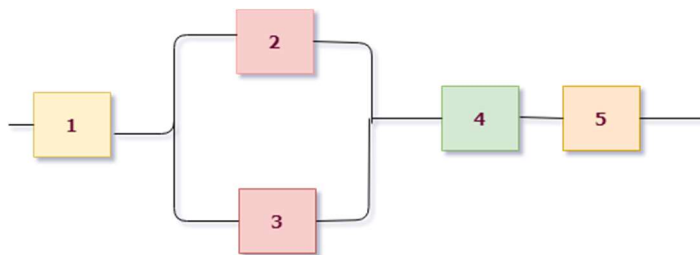
2.2.20 В каждом из трех ящиков, стоящих на стеллаже, имеется по 20 деревянных заготовок разной формы. В первом ящике 17 заготовок без сколов и трещин, во втором 19 заготовок без видимого брака, в третьем 16 качественных заготовок. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все три детали окажутся без сколов, трещин, брака, то есть качественными.

2.2.21 Преподаватель технической механики вызывает студента к доске отвечать. Вероятность того, что студент выйдет отвечать к доске, равна 0,85. Найти вероятность того, что выбранный студент выйдет отвечать к доске лишь на второй вызов.

2.2.22 Наладчик станков с ЧПУ обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует настройки, равна 0,2, второй – 0,45, третий – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены:

- а) только второй станок потребует настройки;
- б) только один станок потребует настройки;
- в) все три станка потребуют настройки;
- г) по крайней мере два станка потребуют настройки;
- д) хотя бы один станок потребует настройки.

2.2.23 Найти вероятность обрыва цепи, если вероятность отказа каждого элемента равна 0,1, а отказы элементов – независимые события.



Теорема сложения вероятностей совместных событий

2.2.24 В магазине Инструменты продается 100 отверток. Известно, что из них 27

индикаторных механических отверток и 4 индикаторных электронных, среди которых имеются 3 со световой и звуковой индикацией. Покупатель хочет приобрести индикаторную отвертку, которая проверяет электропитание. Найдите вероятность того, что выбранная наугад индикаторная отвертка будет соответствовать хотя бы одному требованию покупателя.

2.2.25 Вероятность того, что студент Виктор, увидев в столярной мастерской огнетушитель на верстаке, а не на своем месте, начнет возмущаться составляет 0,65. Вероятность того, что студентка Оксана удивится, увидев на верстаке огнетушитель составляет 0,54. Вероятность того, что Виктор начнет возмущаться и Оксана удивляться одновременно, увидев огнетушитель на верстаке, составляет 0,37. Какова вероятность того, что по крайней мере один студент начнет возмущаться или удивляться при виде огнетушителя?

2.2.26 Автополив в теплице с рассадой цветочных культур не срабатывает в среднем 3 раза за 100 включений. Автополив в теплице с рассадой овощных культур не срабатывает в среднем 2 раза в 50 включений. Вероятность того, что при одновременном включении автополива он не сработает в обоих теплицах составляет 0,01. Какова вероятность того, что при одновременном включении автополива ни один из них не отключится?

2.3 Применение комбинаторики к решению простейших вероятностных задач

Пример 17. Из ящика, в котором находятся 12 двойных и 8 четверных розеток, вынимают наудачу две розетки. Какова вероятность того, что обе розетки окажутся четверными?

Решение: Событие А- появление двух четверных розеток. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по

2, то есть $n = C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$.

Число случаев m, благоприятствующих событию А, составляет

$$n = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} = \frac{14}{95} = 0,147$$

Пример 18. Группу студентов электромонтажников, в которой 18 юношей и 4 девушки для прохождения учебной практики для работы в мастерских случайным образом делят на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что юношей и девушек в подгруппах окажется поровну?

Решение: Переформулируем задачу: из $22(18+4=22)$ студентов группы случайно отбирают $11(22:2=11)$, какова вероятность того, что среди них ровно $2(4:2=2)$ девушки?

Всего способов выбора 11 человек из 22 будет $C_{22}^{11} = \frac{22!}{11!(22-11)!} = 705432$, причем все эти способы равновозможны. Благоприятные исходы: Среди выбранных 11 человек ровно 2 девушки из возможных 4х, то есть 2 девушки, остальные $11-2=9$ (из возможных 18) юноши. Общее количество таких вариантов выбора можно найти по правилу умножения:

$$C_4^2 \cdot C_{18}^9 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{18!}{9!(18-9)!} = 291720$$

Тогда вероятность того, что юношей и девушек в подгруппах окажется поровну составит: $p = \frac{291720}{705432} = \frac{110}{266} = \frac{55}{133} \approx 0,41$

Пример 19. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны l деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Решение. $P(A) = \frac{m}{n}$. Найдем m и n .

Общее число элементарных исходов равно C_N^l . Подсчитаем число благоприятствующих исходов. Происходит сложное событие: из l деталей должно быть k стандартных (стандартные детали можно отобрать только из стандартных; число способов отбора равно C_n^k) и $l-k$ нестандартных (нестандартные детали можно отобрать только из нестандартных; число способов отбора равно C_{N-n}^{l-k}). В итоге имеем $m = C_n^k C_{N-n}^{l-k}$. Искомая вероятность равна $P(A) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{l-k}}{C_N^l}$. Система вероятностей, задаваемой этой формулой, называется **гипергеометрическим** распределением.

Пример 20. В партии из 15 деталей имеется 6 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 3 стандартных.

Решение: $P(A) = \frac{C_6^3 C_{15-6}^{5-3}}{C_{15}^5} = \frac{144}{1001} \approx 0.144$.

Задачи для решения в аудитории

2.3.1 В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными. Результат округлите с точностью до тысячных.

2.3.2 В коробке лежат 10 белых и 11 красных стаканчиков для рассады. Ваня не глядя (случайным образом) достает 5 стаканчиков. Какова вероятность того, что среди них есть 4 белых стаканчика? Результат округлите с точностью до тысячных.

2.3.3 В темном ящике 5 синих проводов и 4 красных. Вы случайно вытаскиваете одновременно три провода. Найдите вероятность того, что вы вытащили провода одного цвета. Результат округлите с точностью до сотых.

2.3.4 Из рассадного ящика на 36 ячеек с 4мя видами растений (огурец, тыква, патиссон, кабачок, каждого по 9) случайным образом вытаскивают 5 растений. Какова вероятность того, что среди выбранных растений будет хотя бы один огурец? (данное событие можно считать событием противоположным к событию среди выбранных 5 растений нет ни одного огурца). Результат округлите с точностью до тысячных.

2.3.5 В партии из 12 деталей имеется 5 стандартных. Наудачу отобраны 6 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 3 стандартных. Результат округлите с точностью до тысячных.

Задачи для самостоятельного решения

2.3.6 В ящике имеется 12 деталей, среди которых 8 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные наугад детали окажутся окрашенными. Результат округлите с точностью до тысячных.

2.3.7 В коробке лежат 10 зеленых и 15 синих подрозетников. Савелий не глядя (случайным образом) достает 4 подрозетника. Какова вероятность того, что среди них есть 3 синих подрозетника? Результат округлите с точностью до сотых.

2.3.8 В рассадном ящике осталось 6 саженцев петунии и 7 саженцев калибрахоа (рассада внешне очень похожа, легко перепутать). Вы случайно вытаскиваете одновременно четыре растения. Найдите вероятность того, что среди выбранных растений 2 петунии. Результат округлите с точностью до сотых.

2.3.9 Из ящика с крепежом на 36 ячеек с 4мя видами крепежа (соединители, клипсы, стяжки, прижимы, каждого по 9 ячеек) случайным образом вытаскивают крепеж из 6 разных ячеек. Какова вероятность того, что среди выбранных ячеек хотя бы в одной будут прижимы? (данное событие можно считать событием противоположным к событию среди выбранных 6 из 36 нет ни одной ячейки с прижимами). Результат округлите с точностью до тысячных.

2.3.10 В партии из 10 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 3 стандартных. Результат округлите с точностью до тысячных.

2.4 Умножение вероятностей. Условная вероятность. Зависимые и независимые события.⁴

Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло это событие В или нет.

Напомним, событие А называется **независимым** от события В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

Вероятность события А, вычисляемая при условии, что событие В произошло, называется **условной вероятностью** события А и обозначается $P_B(A)$ или $P(A/B)$.

⁴ <https://infourok.ru/razrabotka-zadaniy-dlya-samostoyatelnoy-raboty-po-teorii-veroyatnostey-1452444.html>

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое из них произошло: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$ или $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$. В частности отсюда получим формулы условной вероятности: $P_A(B) = P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ и $P_B(A) = P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Пример 21. В ящике находятся 3 деревянных заготовки из сосны и 2 заготовки из бука. Из ящика вынимается по очереди, сначала одна заготовка, потом вторая. Событие $B = \{\text{появление заготовки из сосны при первом вынимании}\}$. Событие $A = \{\text{появление заготовки из сосны при втором вынимании}\}$. Найти вероятность события A , если событие B произошло и вероятность, того что произошло событие A при условии, что событие B не произошло.

Решение: События зависимые.

Вероятность, того что сначала вынули одну заготовку из сосны, потом вторую то же из сосны составит:

$$P(A/B) = \frac{3-1}{(3+2)-1} = \frac{2}{4} = 0,5$$

Вероятность, того что сначала вынули одну заготовку из сосны, потом вторую, но уже не из сосны, а из бука составит:

$$P(A/\bar{B}) = \frac{3}{(3+2)-1} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Пример 22. В питомнике хвойных деревьев в Аганино имеется 8 заказов на новогодние ели: шесть – в Московскую область и два во Владимирскую. Какова вероятность того, что два выбранных наугад заказа уедут в Московскую область?

Решение: Событие $A = \{\text{первый взятый наугад заказ уедет в Московскую область}\}$, событие $B = \{\text{второй заказ тоже уедет в Московскую область}\}$. События зависимые. По теореме об умножении зависимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{6}{8} \cdot \frac{6-1}{8-1} = \frac{15}{28}$$

Пример 23. В мешочке с луковичными лежат 5 луковиц тюльпанов и 5 луковиц гиацинтов. Из мешочка дважды вынимают по луковице, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления луковицы гиацинтов при втором испытании (событие В), если при первом испытании из мешочка достали луковицу тюльпана (событие А).

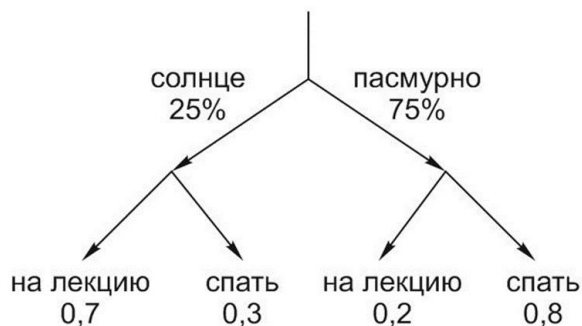
Решение: после первого испытания в мешочке осталось $5+5-1=9$ луковиц, причем $5-1=4$ луковицы тюльпанов и 5 луковиц гиацинтов. Искомая условная вероятность $P(B/A) = \frac{5}{9}$.

Этот же результат можно получить применив формулу условной вероятности: $P_B(A) = P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, где $P(B) = \frac{5}{10}$ (взять 1 луковицу гиацинтов из 10 всех возможных). Найдем вероятность $P(AB)$, того что в первом испытании мы возьмем луковицу тюльпана, а во втором луковицу гиацинта. Общее число всех возможностей взять по очереди две луковицы составит $A_{5+5}^2 = 10 \cdot 9 = 90$, из этого числа исходов событию АВ благоприятствуют $5 \cdot 5 = 25$ исходов, Следовательно $P(AB) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$. Искомая условная вероятность: $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{10}} = \frac{5}{18} \cdot \frac{10}{5} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

Пример 24. Ирина – студентка ККОТСиЛП. Если утром светит солнце, Ирина идет на первую пару с вероятностью 0,7. Если в момент пробуждения Ирины пасмурно, то с вероятностью 0,8 Ирина снова засыпает и пропускает первую пару. Утром 30 марта вероятность солнечной погоды в Костроме оценивается в 25%. С какой вероятностью Ирина будет присутствовать 30 марта на первой паре?

Решение: В этой задаче, погода не зависит от того, пойдет Ирина в колледж на первую пару или продолжит спать. Погода будет ясной или пасмурной независимо от поведения Ирины. А вероятность появления Ирины в колледже к первой паре зависит от погоды. Если светит солнце, Ирина отправится на занятия вовремя с вероятностью 0,7. Если пасмурно, то с вероятностью 0,3. Это и есть условные вероятности.

В качестве иллюстрации решения задачи нарисуем «дерево» возможных исходов.



Вероятность присутствия Ирины на первой паре 30 марта составит $p=0,25 \cdot 0,7 + 0,75 \cdot 0,2 = 0,175 + 0,015 = 0,0325$.

Задачи для решения в аудитории

2.4.1 В питомнике декоративных и плодово-ягодных растений «Русская коллекция» в д.Становщиково имеется 9 заказов: пять из них на плодово-ягодные кустарники и три на декоративно-лиственные теневыносливые растения. Какова вероятность того, что два выбранных наугад для оформления заказа будут на плодово-ягодные кустарники? Результат округлите до сотых.

2.4.2 Из 12 спроектированных ландшафтным дизайнером приусадебных участков, 5 получили высокую оценку конкурсной комиссии. Определите вероятность того, что среди четырех наугад выбранных проектов два высшего качества. Результат округлите до сотых.

2.4.3 Из 20 экзаменационных билетов по «Электротехнике» только 3 содержат простые вопросы. Пять студентов по очереди тянут билеты. Найти вероятность того, что хотя бы одному из них достанется билет с простыми вопросами. Результат округлите до десятитысячных.

2.4.4 По данным социологического опроса, только 10% учащихся колледжа готовясь к дифференцированному зачету по основам безопасности и защите Родины читали свои конспекты, а остальные не читали. Узнав об этом, директор колледжа приказал провести срезовой зачет по дисциплине во всех учебных группах. В результате среди тех, кто не читал конспекты по основам безопасности и защите Родины, зачет сдали 20%, а среди тех, кто читал - 70%. С

какой вероятностью случайно выбранный студент, который сдал зачет, действительно читал свои конспекты?

2.4.5 Из 1000 экземпляров роз, поступивших на склад крупной флористической компании 300 принадлежат первой партии, 500 - второй и 200 - третьей. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованного товара.

1) Определить вероятность того, что наудачу выбранный экземпляр бракованный. 2) Наудачу выбранный экземпляр оказался стандартным, найти вероятность того, что он принадлежит третьей партии. Результат п.2) округлите с точностью до десятых.

Задачи для самостоятельного решения

2.4.6 В столярной мастерской имеется 10 заказов: семь из них на изготовление табурета и три на односпальную кровать из массива сосны. Какова вероятность того, что два выбранных наугад мастером заказа будут изготовление кровати? Результат округлите до тысячных.

2.4.7 Из 15 дипломных проектов выпускников колледжа по специальности Строительство и эксплуатация зданий и сооружений, 7 получили высокую оценку конкурсной комиссии. Определите вероятность того, что среди пяти наугад выбранных проектов два высшего качества. Результат округлите до сотых.

2.4.8 Из 25 экзаменационных билетов по «Древесиноведению и материаловедению» только 7 содержат простые вопросы. Трое студентов по очереди тянут билеты. Найти вероятность того, что хотя бы одному из них достанется билет с простыми вопросами. Результат округлите до тысячных.

2.4.9 По данным социологического опроса, проведенного в рамках подготовки индивидуального проекта, только 10% учащихся колледжа готовясь к дифференцированному зачету по литературе читали необходимые по программе произведения, а остальные не читали. Узнав об этом, заместитель директора по учебно-методической и научной работе приказал провести срезовый зачет по дисциплине во всех учебных группах. В результате среди тех, кто не читал все

произведения из списка, зачет сдали 15%, а среди тех, кто читал - 80%. С какой вероятностью случайно выбранный студент, который сдал зачет, действительно читал свои конспекты? Результат округлите до сотых.

2.4.10 Из 1000 разделочных досок, изготовленных в мастерской колледжа и поступивших на склад крупной торговой сети 400 досок принадлежат первой партии, 350 - второй и 250 - третьей. В первой партии 4%, во второй 3%, в третьей 5% бракованного товара.

1) Определить вероятность того, что наудачу выбранная разделочная доска имеет брак (скол, трещину и пр.). 2) Наудачу выбранная разделочная доска оказалась качественной, найти вероятность того, что она принадлежит второй партии. Результат п.2) округлите с точностью до сотых.

2.5. Формула полной вероятности и формула Байеса⁵

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), \dots, P_{H_n}(A)$ события A .

Теорема Вероятность наступления события A , которое может произойти лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей событий H_i на соответствующие условные вероятности событий A :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$$

Формула носит название **формулы полной вероятности**.

Формула Байеса (теорема гипотез) Если известно, что в результате опыта событие A произошло, то эта информация может изменить вероятности гипотез: повышаются вероятности тех гипотез, при которых событие A

⁵ Теория <https://infourok.ru/razrabotka-zadaniy-dlya-samostoyatelnoy-raboti-po-teorii-veroyatnostey-1452444.html>

происходит с большей вероятностью, и уменьшаются вероятности остальных. Для переоценки вероятностей гипотез при известном результате опыта используется так называемая **теорема гипотез**, или **формула Байеса**:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)}$$

Пример 25. Есть два комплекта деталей. Вероятность того, что деталь первого комплекта стандартная, равна 0,8, а другого 0,9. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь из наугад взятого набора стандартная.

Решение: Пусть событие A – взятая деталь стандартная.

Гипотезы: H_1 – деталь может быть взята из первого набора; H_2 – деталь может быть взята из второго набора.

Вероятность того, что деталь будет взята из первого комплекта $P(H_1) = \frac{1}{2} = 0,5$; из другого – $P(H_2) = \frac{1}{2} = 0,5$

Условная вероятность того, что стандартная деталь будет взята из первого комплекта $P_{H_1}(A) = 0,8$; а другого – $P_{H_2}(A) = 0,9$.

Искомая вероятность события A равна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)$$

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85.$$

Пример 26. В группе лесников 20 студентов. Из них 5 отличников, которые знают все экзаменационные вопросы, 8 студентов знают ответы на 70 % вопросов и 7 студентов на 50 %. Первый вызванный студент ответил на первый вопрос экзаменационного билета. Найти вероятность того, что он отличник.

Решение: Событие A – студент правильно ответил на первый вопрос экзаменационного билета.

Гипотезы: H_1 – студент является отличником; H_2 – студент принадлежит ко второй группе; H_3 – студент принадлежит к третьей группе.

Вероятности гипотез (принадлежности студента к одной из групп) равны:

$$P(H_1) = \frac{5}{20} = 0,25; \quad P(H_2) = \frac{8}{20} = 0,4; \quad P(H_3) = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Найдем условные вероятности события A (вероятности правильных ответов студента из конкретной группы):

$$P_{H_1}(A) = 1; \quad P_{H_2}(A) = 0,7; \quad P_{H_3}(A) = 0,5.$$

Полная вероятность события A равна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)$$

$$P(A) = 0,25 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,7 + 0,35 \cdot 0,5 = 0,705.$$

Применяя формулу Байеса, находим:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}$$

$$P_A(H_1) = \frac{0,25 \cdot 1}{0,705} = \frac{50}{141} = 0,355.$$

Задачи для решения в аудитории.

2.5.1 В группе студентов, пришедших на практику в «Костромагорстрой» из 10 строителей имеются два отличных каменщика, пять хороших каменщиков и три посредственных каменщика. Вероятность качественно выполнить задание прораба отличным каменщиком 0,9; хорошим— 0,8; посредственным— 0,5. Какова вероятность того, что наудачу выбранный каменщик качественно выполнит задание прораба?

2.5.2 Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных в мастерской на фрезерном деревообрабатывающем станке с ЧПУ №1 и 2 коробки деталей, изготовленных на фрезерном деревообрабатывающем станке №2. Вероятность того, что деталь изготовленная на станке № 1 качественная (не имеет сколов и трещин), равна 0,8; а на станке № 2 – 0,9. Сборщик изделия наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена качественная деталь.

2.5.3 В партии 120 лампочек, из них 70 изготовлены на первом заводе, 50 — на втором. Продукция первого завода содержит 80% стандартных ламп, второго — 60%. 1) Найти вероятность события $A = \{\text{наудачу взятые две лампочки являются стандартными}\}$. 2) Найдите вероятность, что обе лампочки изготовлены на первом заводе, при условии, что событие A произошло.

2.5.4 Имеется три партии деталей по 20 штук в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях, соответственно, равны 20, 15 и 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращается в партию и вторично из той же партии извлекается деталь, которая также оказалась стандартной. Найти вероятность того, что все детали были извлечены из третьей партии. Результат округлите до сотых.

2.5.5. В группе из 10 студентов электромонтажников, пришедших на экзамен, 3 студента подготовлены отлично, 4-хорошо, 2-удовлетворительно и 1-плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, удовлетворительно подготовленный – на 10, плохо подготовленный – на 5. Вызванный наугад студента ответил на все три заданных преподавателем вопроса. Найти вероятность того, что этот курсант: 1) подготовлен отлично; 2) подготовлен плохо. Результат округлите до тысячных.

Задачи для самостоятельного решения

2.5.6 В партии выпущенной токарным деревообрабатывающим станком есть бракованные детали 1-го и 2-го сортов. Деталей 1-го сорта вдвое больше чем бракованных деталей, а деталей 2-го сорта вдвое больше чем деталей первого сорта. Качество детали 1-го сорта — 0.95, 2-го — 0,8, бракованной — 0,5. Найти вероятность того, что взятая случайным образом деталь сломается во время периода эксплуатации.

2.5.7 Электродвигатель работает в трёх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя

равна 0,05, при нормальном режиме работы – 0,1, а при форсированном – 0,7. 70% времени электродвигатель работает в нормальном режиме, а 20% – в форсированном. Какова вероятность выхода из строя электродвигателя двигателя во время работы?

2.5.8 На оптовый склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент изделий с дефектами в первой партии 20%, во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось с дефектами. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

2.5.9 В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 19 человек – средний и 3 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,95; 0,7 и 0,4. Известно, что некоторый студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что:

- а) он был подготовлен очень хорошо;
- б) был подготовлен средне;
- в) был подготовлен плохо.

2.5.10 Имеются три партии светодиодных ламп, насчитывающих соответственно 20, 30 и 50 штук. Вероятность того, что светодиодная лампа проработает заданное время, равны для этих партий 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная светодиодная лампа из ста данных проработает заданное время?

2.6 Независимые повторения испытаний с двумя исходами. Схема Бернулли и теорема Бернулли. Наивероятнейшее число успехов.⁶

Если вероятность появления некоего события A в каждом из них не зависит от исходов остальных испытаний, то событие A называется *независимым* событием.

⁶ Теория: http://mathprofi.ru/nezavisimye_ispytaniya_i_formula_bernulli.html

Примеры решения задач: http://mathprofi.ru/files/gotovye_zadachi_na_formulu_bernulli.pdf

Примеры повторных независимых событий:

- монета подбрасывается 10 раз;
- игральная кость подбрасывается 20 раз;
- стрелок совершает 8 выстрелов;
- баскетболист бросает мяч в корзину.

Вероятность выпадения орла либо решки (игрального кубика) в любом испытании не зависит от результатов других бросков.

Для решения задач, в которых число независимых испытаний больше 5 удобно применять следствие из теорем сложения и умножения вероятностей, которое касается независимых испытаний - теорему Бернулли.

Теорема(формула) Бернулли (справедлива только для тех независимых испытаний, в которых вероятность p события A сохраняется постоянной):

Вероятность P_n^m того, что в n независимых испытаниях некоторое случайное событие A наступит ровно m раз, равна: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где: p – вероятность появления события A в каждом испытании; $q = 1 - p$ – вероятность не появления события A в каждом испытании. Коэффициент C_n^m часто называют биномиальным коэффициентом и рассчитывается он по формуле числа сочетаний.

Для применения схемы Бернулли нужно, чтобы выполнялись три условия:

- 1) опыты должны быть независимы между собой;
- 2) каждый опыт должен иметь два результата $A, \bar{A}$ и никаких других вариантов;
- 3) вероятность появления события A должна быть одинаковой для каждого следующего опыта.

Пример 27. Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна $p=0,6$. Найти вероятность того, что:

- а) стрелок попадёт только один раз;
- б) стрелок попадёт 2 раза.

Решение: Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле считается известной. Она равна $p=0,6$. Тогда вероятность промаха (не попадания) в каждом выстреле будет равна $q=1-p=1-0,6=0,4$.

а) Событие A =«Стрелок попадёт только один раз» и обозначим его вероятность через P_4^1 («одно попадание из четырёх»). $C_4^1=4$ способами можно выбрать испытание, в котором стрелок попал.

И, поскольку в каждом случае имеет место 1 попадание и 3 промаха, то по формуле Бернулли получим: $p(A)=P_4^1=C_4^1 p q^3=4 p q^3=4 \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^3=0,1536$ — вероятность того, что стрелок попадёт только один раз из четырёх

б) Событие B = «Стрелок попадёт два раза»

$p(B)=P_4^2$ («два попадания из четырёх»).

$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами (перечислены выше) можно выбрать 2 испытания, в которых произойдут попадания, а точнее ровно 2 попадания и 2 промаха,

то: $p(B)=P_4^2=C_4^2 p^2 q^2=6 p^2 q^2=6 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2=0,3456$

Пример 28. Пример задачи, в которой испытания не повторяются, а скорее, производятся одновременно, но формула Бернулли применима.

Найти вероятность того, что при броске 10 монет орёл выпадет на 3 монетах.

Здесь: $P_{10}^3 = C_{10}^3 p^3 q^7 = \dots = 0,1171875$.

Решение: $C_{10}^3=120$ способами можно выбрать 3 монеты, на которых выпадет

орёл. $p = \frac{1}{2}$ – вероятность выпадения орла на каждой из 10 монет и т.д.

Пример 29. Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков: а) не выпадут (выпадут 0 раз);

б) выпадут 2 раза;

в) выпадут 5 раз.

Результаты округлить до 4 знаков после запятой.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данной задаче:

$n = 6$ – всего испытаний; $p = \frac{1}{6}$ – вероятность выпадения «пятёрки» в каждом

испытании; $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ – вероятность того, что «пятёрка» не выпадет (для каждого испытания).

а) $m = 0$ $P_6^0 = C_6^0 p^0 q^6 = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,3349$ – вероятность того, что в результате 6 бросков кубика «пятёрка» не появится.

б) $m = 2$ $P_6^2 = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5^4}{6^4} = \frac{5^5}{2 \cdot 6^3} \approx 0,2009$ – вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 2 раза.

в) $m = 5$ $P_6^5 = C_6^5 p^5 q^1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6^3} \approx 0,0006$ – вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 5 раз.

Ответ: а) $\approx 0,3349$; б) $\approx 0,2009$; в) $\approx 0,0006$

Пример 30. Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем бывает 60% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет:

- а) от 2 до 4 изделий первого сорта;
- б) не менее 5 изделий первого сорта;
- в) хотя бы одно изделие более низкого сорта.

Решение: Вероятность производства первосортного изделия не зависит от качества других выпущенных изделий, поэтому здесь идёт речь о независимых испытаниях. Здесь вероятность дана в процентах, необходимо перевести в

десятичную дробь. $p = \frac{60}{100} = 0,6$ – вероятность того, что выбранное изделие будет 1-го сорта. Тогда: $q = 1 - p = 0,4$ – вероятность того, что оно не будет первосортным.

а) Событие «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта» состоит в трёх несовместных исходах:

среди $n = 6$ изделий будет 2 первосортных или 3 первосортных или 4 первосортных.

Трижды применим формулу Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$:

$$P_6^2 = C_6^2 \cdot (0,6)^2 \cdot (0,4)^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0,36 \cdot 0,0256 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0,009216 = 0,13824;$$

$$P_6^3 = C_6^3 \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 0,216 \cdot 0,064 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot 0,013824 = 0,27648;$$

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 0,1296 \cdot 0,16 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0,020736 = 0,31104.$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P_6(2 \leq m \leq 4) = P_6^2 + P_6^3 + P_6^4 = 0,13824 + 0,27648 + 0,31104 = 0,72576$ — вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта.

б) Событие «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет не менее 5 изделий первого сорта» состоит в 2 несовместных исходах: первосортных изделий будет пять или шесть.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_6(m \geq 5) = P_6^5 + P_6^6 = C_6^5 \cdot (0,6)^5 \cdot (0,4)^1 + C_6^6 \cdot (0,6)^6 \cdot (0,4)^0 = 6 \cdot (0,6)^5 \cdot 0,4 + (0,6)^6 = 0,186624 + 0,046656 = 0,23328$$
 — искомая вероятность.

в) Вероятность того, что «Среди 6 наудачу отобранных изделий будет хотя бы одно изделие более низкого сорта» удобно найти через вероятность противоположного события («Все изделия будут первосортными»), которая уже известна:

$$P_6(0 \leq m \leq 5) = 1 - P_6^6 = 1 - 0,046656 = 0,953344$$
 — вероятность того, что среди шести отобранных изделий окажется хотя бы одно низкосортное.

Ответ: а) 0,72576; б) 0,23328; в) 0,953344

Наивероятнейшее число появлений события А в n независимых испытаниях

Для отыскания наивероятнейшего числа m_0 появлений случайного события A в n независимых испытаниях (с вероятностью P в каждом испытании) руководствуются следующим двойным неравенством: $np - q \leq m_0 < np + p$, причём:

1) если значение $np - q$ – дробное, то существует единственное наивероятнейшее число m_0 ;

в частности, если np – целое, то оно и есть наивероятнейшее число: $m_0 = np$;

2) если же $np - q$ – целое, то существуют два наивероятнейших числа: m_0 и $m_0 + 1$

Пример 31. Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 8 бросках и соответствующую вероятность.

Решение: для оценки наивероятнейшего числа попаданий используем двойное

$8 \cdot 0,3 - 0,7 \leq m_0 < 8 \cdot 0,3 + 0,3$ неравенство $np - q \leq m_0 < np + p$. В данном случае: $n = 8$ – всего бросков; $p = 0,3$ – вероятность попадания в корзину при каждом броске; $q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0,7$ –

вероятность промаха при каждом броске. Таким образом, наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках находится в следующих пределах:

Поскольку левая граница – дробное число (пункт №1), то существует единственное наивероятнейшее значение, и, очевидно, что оно равно $m_0 = 2$.

Используя формулу Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, вычислим вероятность того, что при 8 бросках будет ровно 2 попадания:

$$P_8^2 = C_8^2 \cdot (0,3)^2 \cdot (0,7)^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot (0,3)^2 \cdot (0,7)^6 = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot (0,3)^2 \cdot (0,7)^6 = 0,29647548$$

Ответ: $m_0 = 2$ – наивероятнейшее количество попаданий при 8 бросках,

Задачи для решения в аудитории

Теорема Бернулли 2.6.1 Пусть проводится $n = 6$ независимых проб изготовления новой детали на фрезерном деревообрабатывающем станке, в

каждом из которых вероятность появления события $A = \{\text{брак на детали (скол, трещина и др.)}\}$ постоянна и равна $p = 0,1$. Найти вероятность того, что в данной серии проб событие A появится $m = 3$ раза.

2.6.2 В результате составления социального паспорта групп студентов 1-го курса были выделены семьи, имеющие по 4 ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней:
а) одного мальчика; б) двух мальчиков.

2.6.3 По данным технического контроля 2% изготовленных токарных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Найти вероятность того, что из 6 изготовленных станков 4 нуждаются в дополнительной регулировке.

2.6.4 В каменной мастерской проходят учебную практику 6 студентов. Каждый может выложить полукруг из облицовочного кирпича с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что не более двух человек выложат полукруг из облицовочного кирпича.

2.6.5 Четыре покупателя - студента приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих студентов потребуется ударная дрель марки Вихрь ДУ-850, равна 0,4. Найти вероятность того, что ударная дрель потребуется: а) не менее чем двум покупателям; б) не более чем трем покупателям; в) всем четырем покупателям.

Наивероятнейшее число появлений события

2.6.6 В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя в Костромской области 1 октября равна $\frac{1}{7}$. Найти наивероятнейшее число дождливых дней в Костромской области 1 октября за 40 лет.

2.6.7 Имеется 20 ящиков деталей вырезанных на станке с ЧПУ. Вероятность того, что в одном наудачу взятом ящике детали окажутся стандартными, равна 0,8. Найти наивероятнейшее число ящиков, в которых все детали стандартные.

2.6.8 Один студент за смену может выпилить 20 изделий, другой – 30 изделий, причем вероятности того, что эти изделия высшего сорта, составляют

соответственно 0,94 и 0,8. Определить наивероятнейшее число изделий высшего сорта, изготовленных каждым студентом.

Задачи для самостоятельного решения.

Теорема Бернулли

2.6.9 В цехе имеется 6 деревообрабатывающих станков. Для каждого станка вероятность того, что он в данный момент рабочего времени включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены все станки.

2.6.10 Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?

2.6.11 Вероятность приживаемости саженцев голубой ели поздней осенью составляет 0,8. Какова вероятность того, что из 8 посаженных елей весной приживутся 5 голубых елей?

2.6.12 В результате составления социального паспорта групп студентов 1-го курса были выделены семьи, имеющие по 4 ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней: а) одной девочки; б) трех девочек.

2.6.13 Пять покупателей студентов приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих студентов потребуется электролобзик Makita с лазером, равна 0,3. Найти вероятность того, что электролобзик потребуется: а) не менее чем двум покупателям; б) не более чем трем покупателям; в) всем покупателям.

Наивероятнейшее число появлений события

2.6.14 Вероятность попадания молотком по гвоздю равна 0,7. Сделано 5 ударов молотка. Найти наивероятнейшее число попаданий молотком по гвоздю.

2.6.15 Имеется 10 ящиков деталей вырезанных на станке с ЧПУ. Вероятность того, что в одном наудачу взятом ящике детали окажутся стандартными, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число ящиков, в которых все детали стандартные.

2.6.16 Один студент за смену может выложить кладку из 120 кирпичей, другой – 130 кирпичей, причем вероятности того, что кладка выполнена качественно

составляют соответственно 0,95 и 0,83. Определить наивероятнейшее число кирпичей качественно выложенных каждым студентом.

Вопросы для самоконтроля по теме:

1. Классическое определение вероятности
2. Вероятность достоверного/невозможного/случайного события
3. Чему равна сумма(произведение) для независимых/зависимых, совместных/несовместных событий
4. Сформулируйте теорему Бернулли, в каких случаях она применима
5. Сформулируйте правило нахождения наивероятнейшего числа успехов.

3. Дискретная случайная величина, закон ее распределения⁷

Цель: формирование понятий случайная величина, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение случайной величины

Студент должен знать:

- основные примеры случайных величин;
- математическое ожидание;
- дисперсия;
- среднее квадратическое отклонение случайной величины;
- формулы числовых характеристик случайной величины.

Студент должен уметь:

- вычислять вероятность случайной величины;
- приводить примеры случайных величин;
- рассчитывать вероятность случайной величины используя теорему Бернулли;
- вычислять числовые характеристики случайных величин.

Случайной величиной (СВ) называют числовую функцию, заданную на множестве элементарных исходов и принимающую конкретные

⁷ Теория <https://infourok.ru/razrabotka-zadaniy-dlya-samostoyatelnoy-raboty-po-teorii-veroyatnostey-1452444.html>

числовые значения. Случайная величина, это величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение, причем, заранее неизвестно какое именно.

Случайную величину обозначают заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \dots$, а значения случайной величины строчными: $x, y, z, \dots$

Пример 32 Случайная величина X – число очков, выпавших при броске игральной кости;

Y – число появлений герба при 10 бросках монеты;

Z – число выстрелов до первого попадания в цель;

T – расстояние от центра мишени до пробойны при попадании.

Множество возможных значений для данных случайных величин имеет разный вид: для X и Y оно конечно (соответственно 6 и 11 значений), для Z – множество значений бесконечно и представляет собой множество натуральных чисел, а для T – все точки отрезка, длина которого равна радиусу мишени.

Таким образом, для X , Y и Z – множество значений из отдельных (дискретных), изолированных друг от друга значений, а для T – оно представляет собой непрерывную область.

По этому показателю случайные величины подразделяются на две группы: дискретные и непрерывные.

Дискретной (ДСВ) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Дискретная случайная величина используется при описании измерений, принимающих целочисленные значения: число дефектных

изделий, число телефонных вызовов, число неисправностей в приборе и т.д. и может быть записана в виде последовательности $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$.

Для некоторых случайных величин число возможных значений, принимаемых этой величиной, бывает настолько велико, что удобнее представлять их в виде непрерывных случайных величин (НСВ), которые принимают любое значение, в некотором интервале, например, продолжительность работы электрической лампы, дальность полета снаряда, уровень воды в половодье и т.д.

Для полного описания дискретной случайной величины необходимо:

- указать все её возможные значения.
- задать вероятности, с которыми принимаются эти значения.

Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их соответствующими вероятностями называется **законом распределения** дискретной случайной величины.

Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется **рядом распределения (законом распределения)**:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Так как дискретная случайная величина обязательно примет одно из своих значений x_i , то события $X = x_i$ образуют полную группу событий,

поэтому справедливо **условие нормировки**: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Закон распределения (функция распределения и ряд распределения) полностью описывают поведение случайной величины.

Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i.$$

Математическое ожидание $M(X)$ указывает точку (центр распределения вероятностей случайной величины) на числовой оси, вокруг которой группируются возможные значения случайной величины. Заметим, что математическое ожидание случайной величины может не существовать.

Для оценки рассеянности возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания, пользуются числовой характеристикой, которую называют дисперсией.

Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Теорема Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Если X – дискретная случайная величина, то дисперсию вычисляют по следующим формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i, \quad \text{или}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \right)^2.$$

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии рассчитывают и её среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением σ случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Вопросы для самоконтроля по теме

1. Основные примеры случайных величин;
2. Математическое ожидание случайной величины;
3. Дисперсия случайной величины;
4. Среднее квадратическое отклонение случайной величины;
5. Формулы числовых характеристик случайной величины.

Задачи для решения в аудитории

3.1 Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,15	0,27	0,09	p_3	0,4

Найти вероятности p_3 и $P(1 \leq X \leq 3)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение.

3.2 В партии из шести деталей, изготовленных на деревообрабатывающем станке, имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. Найдите числовые характеристики случайной величины X .

3.3 Рабочий обслуживает 3 станка, вероятности выхода из строя каждого из которых в течение часа соответственно равны 0,2; 0,15; 0,1. Составить закон распределения числа станков, не требующих ремонта в течение часа. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

3.4 Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для

фрезерного станка первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7, третьего типа – 0,8. Случайная величина X – число фрезерных станков, проработавших гарантийный срок, среди трех станков разных типов.

Задачи для самостоятельной работы

3.5 Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,25	0,17	0,13	p_3	0,3

Найти вероятности p_3 и $P(2 \leq X \leq 4)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение.

3.6 В партии из семи деталей, изготовленных на деревообрабатывающем станке, имеется три стандартные. Наудачу отобраны четыре детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. Найдите числовые характеристики случайной величины X .

3.7 Вероятность перевыполнения плана для первой бригады студентов равна 0,9, для второй бригады студентов – 0,8, для третьей бригады студентов – 0,7. Случайная величина X – число бригад, перевыполнивших план.

4. Ответы к задачам из сборника

1. Основные понятия комбинаторики

1.1 Перестановки. 1.1.1 5040; 1.1.2 362880; 1.1.3 720; 1.1.4 120; 1.1.5 3628800; 1.1.6 720; 1.1.7 5040; 1.1.8 120; 1.1.9 24; 1.1.10 40320; 1.1.11 3628800; 1.1.12 720; 1.1.13 362880.

1.2 Размещения. 1.2.1 600; 1.2.2 151200; 1.2.3 95040; 1.2.4 720; 1.2.5 2162160; 1.2.6 32432400; 1.2.7 55440; 1.2.8 1860480; 1.2.9 45239040; 1.2.10 127512000.

1.3 Сочетания. 1.3.1 84; 792; 1; 13; 1; 1.3.2 63; 32; 1.3.3 35; 1.3.4 28; 1.3.5 715; 1.3.6 84; 1.3.7 70; 3003; 1; 19; 1.3.8 336; -5; 1.3.9 120; 1.3.10 15; 1.3.11 15504; 1.3.12 12650.

2. Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей

2.1 Классическая вероятность 2.1.1 0,3; 2.1.2 0,2; 2.1.3 0,96; 2.1.4 $\approx 0,83$; 2.1.5 0,18; 2.1.6 0,32.

Вероятность противоположных событий 2.1.7 0,97; 2.1.8 0,22; 2.1.9 0,9.

Классическая вероятность 2.1.10 0,5; 2.1.11 $\approx 0,83$; 2.1.12 0,6; 2.1.13 0,25; 2.1.14 0,073; 2.1.15 0,39; 2.1.16 0,38.

Вероятность противоположных событий 2.1.17 0,975; 2.1.18 0,07; 2.1.19 0,94; 2.1.20 0,095

2.2 Совместные и несовместные события. Теоремы о вероятности суммы событий

Теорема сложения вероятности несовместных событий 2.2.1 0,1; 2.2.2 0,43; 2.2.3 0,54; 2.2.4 0,12.

Вероятность произведения независимых событий 2.2.5 0,6873; 2.2.6 0,003; 2.2.7 0,504; 2.2.8 0,096; 2.2.9 1) 0,019; 2) 0,032; 3) 0,684; 4) 0,283; 5) 0,9999; 2.2.10 0,508

Теорема сложения вероятности совместных событий 2.2.11 0,04; 2.2.12 0,04; 2.2.13 0,14.

Теорема сложения вероятности несовместных событий 2.2.14 0,13; 2.2.15 0,45; 2.2.16 0,5; 2.2.17 $\approx 0,17$.

Вероятность произведения независимых событий 2.2.18 0,8277; 2.2.19 0,00104; 2.2.20 0,646; 2.2.21 0,1275; 2.2.22 а) 0,252; б) 0,461; в) 0,027; г) 0,348; д) 0,748; 2.2.23 0,27829.

Теорема сложения вероятности совместных событий 2.2.24 0,4; 2.2.25 0,82; 2.2.26 0,06.

2.3 Применение комбинаторики к решению простейших вероятностных задач

2.3.1 $\approx 0,264$; 2.3.2 $\approx 0,114$; 2.3.3 $\approx 0,17$; 2.3.4 $\approx 0,786$; 2.3.5 $\approx 0,379$; 2.3.6 $\approx 0,255$; 2.3.7 $\approx 0,36$; 2.3.8 $\approx 0,44$; 2.3.9 $\approx 0,162$; 2.3.10 $\approx 0,238$.

2.4 Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Условная вероятность. 2.4.1 $\approx 0,28$; 2.4.2 $\approx 0,07$; 2.4.3 $\approx 0,6009$; 2.4.4 0,28; 2.4.5 1) 0,051 2) $\approx 0,2$. 2.4.6 $\approx 0,067$; 2.4.7 $\approx 0,07$; 2.4.8 $\approx 0,645$; 2.4.9 $\approx 0,37$; 2.4.10 1) 0,039; 2) $\approx 0,35$.

2.5 Формула полной вероятности и формула Байеса. 2.5.1 $\approx 0,73$; 2.5.2 0,84; 2.5.3 1) 0,513; 2) 0,42; 2.5.4 $\approx 0,44$; 2.5.5 1) $\approx 0,570$; 2) $\approx 0,017$; 2.5.6 0,2; 2.5.7 0,215; 2.5.8 а) $\approx 0,57$; б) $\approx 0,43$; 2.5.9 а) $\approx 0,16$; б) $\approx 0,77$; в) $\approx 0,07$; 2.5.10 0,83.

2.6 Независимые повторения испытаний с двумя исходами. Схема Бернулли и теорема Бернулли. Наивероятнейшее число успехов. 2.6.1 0,01458; 2.6.2 а) 0,25; б) 0,375; 2.6.3 0,000002; 2.6.4 0,54432; 2.6.5 а) 0,5248; б) 0,9744; в) 0,0256; 2.6.6 5; 2.6.7 16; 2.6.8 19 и 24; 2.6.9 0,262144; 2.6.10 0,9477; 2.6.11 0,14680064; 2.6.12 а) 0,25; б) 0,25; 2.6.13 0,47178; 2.6.14 4; 2.6.15 9; 2.6.16 114 и 108.

3. Дискретная случайная величина, закон ее распределения

3.1 $p_3=0,09$, и $P(1 \leq X \leq 3)=0,45$; $M(X)=2,32$; $D(X)=7,84$; $\sigma(X)=2,8$;

3.2 $M(X)=2$; $D(X)=4,4$; $\sigma(X) \approx 2,1$

x_i	0	1	2	3
p_i	0	0,2	0,6	0,2

3.3 $M(X)=2,55$; $D(X)=0,3775$; $\sigma(X) \approx 0,61$

x_i	0	1	2	3
p_i	0,003	0,056	0,329	0,612

3.4 $M(X)=2,4$; $D(X)=0,46$; $\sigma(X) \approx 0,68$

x_i	0	1	2	3
p_i	0	0,2	0,6	0,2

3.5 $p_3=0,15$ и $P(2 \leq X \leq 4)=0,58$; $M(X)=2,08$; $D(X)=6,84$; $\sigma(X) \approx 2,61$

3.6 $M(X)=\frac{60}{35} \approx 1,71$; $D(X)=\frac{120}{35} \approx 3,43$; $\sigma(X) \approx 1,85$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

3.7 $M(X)=2,4$; $D(X)=0,46$; $\sigma(X) \approx 0,68$

x_i	0	1	2	3
p_i	0	0,2	0,6	0,2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно сказать, что жизнь человека, да и в целом вся окружающая среда (погодные условия, проезд автобуса на остановку, приобретение качественного или бракованного товара, и многое другое) состоит из череды различных, чаще всего случайных событий. Человеку свойственно эти события не только отслеживать, но и пытаться их прогнозировать. При этом важно и нужно понимать, что многие события или явления – случайные, т. е. они могут наступить, а могут не наступить.

Решение задачи в математике заключается в разрешении вопроса или проблемы, для чего требуется тщательный анализ и применение специальных средств и методов, в выявлении и исследовании закономерностей, которым подчиняются реальные процессы. Умение исследовать случайные явления, осуществлять прогноз случайных событий, находить их закономерности, влиять на ход этих явлений, контролировать и ограничивать сферу действия случайности это как раз задача теории вероятностей.

Новизна и «авторская находка» данного сборника, заключается в интеграции двух основных целей в профессиональном и общем образовании: повышение качества математического образования, формировании функциональной грамотности (математической и естественно-научной) и формировании общих и профессиональных компетенций.

Предлагаемый сборник однозначно будет полезен не только преподавателям математики, студентам средних-профессиональных учебных заведений, но и школьникам, готовящимся к ЕГЭ. Предлагаемый объём задач для решения в аудитории и самостоятельно на занятиях или дома окажет неоценимую помощь в освоении теории вероятностей, познакомит студентов с элементами своей специальности и расширит их кругозор.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральная РП Теория вероятностей и математическая статистика
https://ptlab.mccme.ru/sites/ptlab.mccme.ru/files/federalnaya_rabochaya_programma_uchebnogo_kursa_veroyatnost_i_statistika_10-11_klassbazovyy_uroven._poyasnitelnaya_zapiska.pdf
2. Авторские задачи Сидоровой ММ, составленные с использованием типовых задач из учебников.
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для среднего профессионального образования / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 479 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-00859-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/469552>
4. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 271 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01650-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/453342>
5. Математика. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень 10кл/ Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М./ Под ред. Подольского В.Е./ ООО ИЦ “ВЕНТАНА-ГРАФ” /АО “Издательство “Просвещение», 2020г
6. Математика. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень 10кл / Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М./ Под ред. Подольского В.Е./ ООО ИЦ “ВЕНТАНА-ГРАФ” /АО “Издательство “Просвещение», 2020г
7. Математика. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень 11кл/ Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М./ Под ред. Подольского В.Е./ ООО ИЦ “ВЕНТАНА-ГРАФ” /АО “Издательство “Просвещение», 2020г

8. Математика. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень 10кл / Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М./ Под ред. Подольского В.Е./ ООО ИЦ “ВЕНТАНА-ГРАФ” /
9. Тюрин Ю.Н.и др.Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10-11 классов/Ю.Н.Тюрин, А.А. Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Яценко-М.:МЦНМО, 2014.-248с
- 10.Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. Москва : Айрис-пресс, 2018
- 11.<https://ru.citaty.net/temy/veroiatnost/>
- 12.<https://self-edu.ru/>
- 13.<https://oblakoz.ru/conspect/488213/Protivopolozhnye%20sobytiya>
- 14.<http://mathprofi.ru>, Емелин А., Высшая математика – просто и доступно!
- 15.https://matem96.ru/primer/primer_terver12.shtml
- 16.https://libeldoc.bsuir.by/bitstream/123456789/55782/1/Gurevich_Teoriya.pdf
- 17.<https://studfile.net/preview/7435080/page:2>
- 18.<https://studfile.net/preview/17221220/page:2>
- 19.<https://infourok.ru/razrabotka-zadaniy-dlya-samostoyatelnoy-raboti-po-teorii-veroyatnostey-1452444.html>
- 20.https://mathter.pro/teorver/1_6_3_teorema_umnozheniya_veroyatnostey_nezavisimyh_sobytiy.html
21. <https://znaniya.com/task/34350841>
- 22.<https://www.univerkov.ru/270590/>
- 23.<https://reshka.feniks.help/vyshshaya-matematika/teoriya-veroyatnosti/nayti-veroyatnost-togo-chto-toka-v-cepi-ne-budet>
24. <https://ege-study.ru/teoriya-veroyatnostej-derevo-vozmozhnyx-iskhodov/>
25. <https://ege-study.ru/ege-matematika/mini-kurs-teoriya-veroyatnostey/>
- 26.<https://infourok.ru/razrabotka-zadaniy-dlya-samostoyatelnoy-raboti-po-teorii-veroyatnostey-1452444.html>

27. https://kpfu.ru/staff_files/F_2008640497/5.pdf
28. Задачи на электрические схемы
https://www.matburo.ru/tvart_sub.php?p=art_scheme
29. https://nti.ncfu.ru/vikon/sveden/files/23_Metod_Teoriya_veroyatnosti_09.03.02_2022_OFO.pdf
30. Статья Профессионально-ориентированные задачи для студентов экономических ВУЗов <https://moluch.ru/archive/177/46119/>
31. <https://attestatika.ru/kursy/kurs-dlya-prepodavatelej-matematiki-v-spo-o-primenenii-professionalno-orientirovannyh-zadach/>